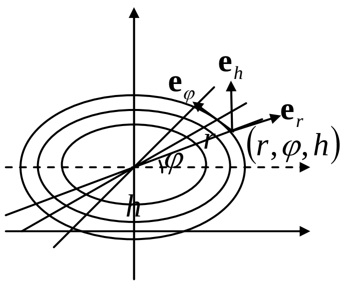
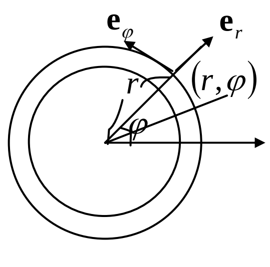
付録 A 円柱座標と極座標によるベクトル微分係数の表示と運動学への応用

円柱座標や極座標などのいわゆる曲線直行座標でベクトルを表現するときには、基底ベクトルの方向が場所場所で異なることに注意しなければならない。円柱座標では、位置(r,φ,h)における基底ベクトルは、水平面内で z 軸から遠ざかる方向を向き、z 軸と垂直な方向の単位ベクトル$\mathbf{e}_r$、偏角φが増大する方向を向き、水平面内で$\mathbf{e}_r$と垂直な単位ベクトル$\mathbf{e}_\varphi$、およびz 軸と平行な単位ベクトル$\mathbf{e}_h$の 3 つの単位ベクトルで構成される（図 A.1a 参照)。2 次元の極座標では、(r,φ)の位置における基底ベクトルは、位置ベクトル$\mathbf{r}$方向を向く単位ベクトル$\mathbf{e}_r$と$\mathbf{e}_r$に垂直で平面内にあり、偏角φが増大する方向を持つ単位ベクトル$\mathbf{e}_\varphi$である（図 A.1b 参照)。3 次元の極座標（球座標）では動径方向の単位ベクトル$\mathbf{e}_r$、水平面内にあり$\mathbf{e}_r$と垂直でφが増大する方向の単位ベクトル$\mathbf{e}_\varphi$および方位角θが増大する方向の単位ベクトル$\mathbf{e}_\theta$で構成される（図 A.1c 参照)。



図A.1a 円柱座標系



図A.1b 2次元極座標系

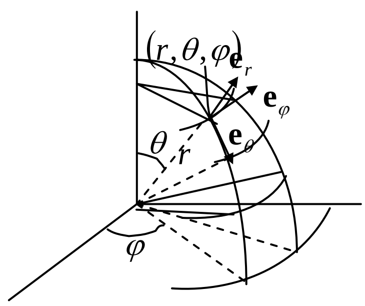


図6.1c 球座標系

この様な座標系では、座標軸なるものはデカルト座標系(x,y,z)に比べて異なって見える。そもそも座標軸とは、x 軸を例に取れば、y と z を一定値とし x を任意に変化させて形成される点の集合（軌跡）として見ることができる。特に y と z をゼロであるときの軌跡を基準に取るとすれは、これを x 軸と呼ぶ。デカルト座標系ではこの座標軸は直線となる。y と z にいろいろな値を入れて x の値を変化させると、x 軸に平行な直線群が得られる。同様にして x と z の値を固定して y を変化させると y 軸に平行な直線群が得られる。また、z 軸に並行な直線群も作れる。これらの直線群はお互いに直交していて碁盤の目のような目盛りを与える。これと同様なことを円柱座標と極座標について考える。円柱座標では、空間の位置を与えるのは 3 つのパラメータ r、φ および h である。ここで、φ および h をいろいろな値に固定し、r を変化させると z 軸に垂直な放射状の直線群が得られる。この直線群のなかで φ および h をゼロとしたときの直線は“r 軸”とでも言うべき座標軸を与えるであろう。

しかしながら、円柱座標ではこの直線群全てをr軸とよぶ。また、rつまりz軸からの距離を固定し、hつまり高さを固定してφを変化させると、z軸を取り巻く半径rの円を高さhで形成する。また、rとhのいろいろな値に対しては円群を作る。これらを“φ”軸とよぶ。このφ軸に関してはrとhにゼロを入れると原点になってしまい、原点を通るφ軸が形成できない。更に、rとφにいろいろな値をいれ、hを連続に変化させるとz軸に平行な直線群が得られ、rとφにゼロを入れた場合はz軸そのものとなる。つまり、これを円柱座標のh軸あるいはz軸と呼ぶ。このようにして作られた直線あるいは曲線（円）群は互いに直交していて、空間を網の目のように覆う。このような座標系を直交曲線座標系と言う。次に、このような直交曲線座標系における基底ベクトルと各座標軸の関係を調べる。$\mathbf{e}_r$は動径方向のベクトルであるから$\mathbf{r}$方向を向く単位ベクトルである。また、$\mathbf{e}_\varphi$はφ軸方向の、および$\mathbf{e}_h$はz軸方向の単位ベクトルである。

円柱座標系と同様の考え方を 2 次元極座標に適用する。まず、φを一定としてrを連続的に変化させると、原点から伸びる放射状の直線群が形成される。これをr軸とする。また、rを固定してφを変化させると同心円群が形成される。これがφ軸である。また、r方向を向く単位ベクトルが$\mathbf{e}_r$であり、φ軸方向でφが増加する方向を向く単位ベクトルが$\mathbf{e}_\varphi$である。これらはもちろん直交している。

球座標（3 次元極座標）では、偏角φと方位角θを固定しrを変化させると、原点を通る放射状の直線群が形成されr軸ができる。またrとθを固定し、φを変化させるとz軸を取り巻く同心円群ができる。地球儀における緯線がこれでありφ軸という。また、rとφを固定し、θを変化させると球座標の北極と南極点を通過する円群が形成される。これが地球儀上の経線でありθ軸という。これらのr、θおよびφの角軸方向の単位ベクトルを$\mathbf{e}_r$、$\mathbf{e}_\varphi$および$\mathbf{e}_\theta$とする。これらの曲線座標系における各単位ベクトルの方向は空間の位置に応じて変化することに注意する。

このような座標系は、空間を運動する質点に作用する力などの力学系の対象性に合わせて用いられる。たとえば、中心力のポテンシャル中での質点の運動を記述するために球座標あるいは 2 次元極座標が利用される。流体力学では円柱の周りを流れる流体構造を議論するのに円柱座標が用いられる。球体の回りの流体運動は球座標を使って記述されることが多い。また、点対象な電荷分布が作り出す電場は球座標で記述され、直線状の電荷分布が作る電場あるいはポテンシャルは円柱座標で記述されることが多い。もちろん、デカルト座標、つまり(x, y, z)座標でもこれらは表現できるが、適当な曲線座標を用いることでいろいろな計算が簡単になり、また構造が良く見えるのである。

曲線座標として 2 次元の極座標を用い、中心力ポテンシャル中で運動する質量mの粒子

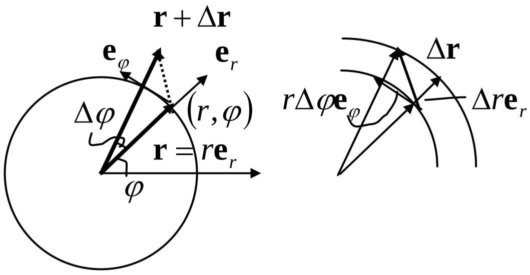
の運動を考える。質点の位置ベクトルを$\mathbf{r}$とすると、$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$と書ける。ここで、rはポテンシャルの中心からの距離であり、時間の関数である。また、$\mathbf{e}_r$は$\mathbf{r}$方向の単位ベクトルであるが、質点の運動により位置が変わるので$\mathbf{e}_r$も時間の関数と考える。このような観点から$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$を時間で微分する(図 A.2a 参照)。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \tag{A.1}$$

であるが、$\mathbf{e}_r$の時間微分を検討する。時間微分の意味は

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_r}{\Delta t} \tag{A.2}$$

であり、時間微分して得られるものはベクトルである。



図A.2a 2次元極座標系による速度の表現

このベクトルの方向は、φが時計回りに増大する場合は半径rの円の接線方向である$\mathbf{e}_\varphi$方向である（φ座標軸、図参照）。また、φが反時計回りで運動する場合は$-\mathbf{e}_\varphi$方向となる。それでは、この時間微分されたベクトルの大きさはどうであろうか。まず、

$$|\Delta\mathbf{e}_r|=|\Delta\varphi|$$

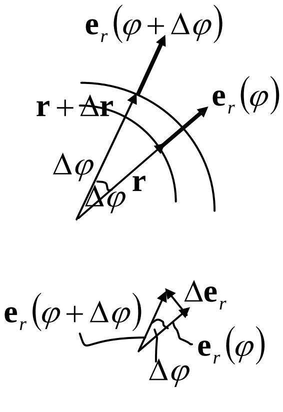
に注意すると、$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{e}_r}{\Delta t}\right|=\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$であるので、ベクトル$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$の大きさは$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$であることがわかる。結局、結局粒子の回転方向に係わらず(図 A.2b 参照)、

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi \tag{A.3}$$

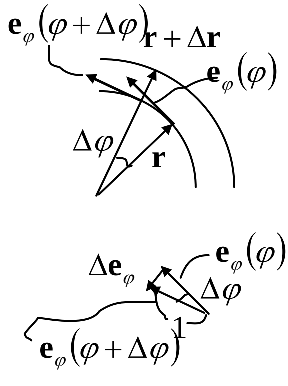
であるので、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi \tag{A.4}$$

となることがわかる。



図A.2b $\mathbf{e}_r$　ベクトルの変化



図A.2c $\mathbf{e}_\varphi$　ベクトルの変化

この結果の意味するところは、質点の速度ベクトルは動径方向の成分である $\dfrac{dr}{dt}$ と偏角方向の成分である $r\dfrac{d\varphi}{dt}$ のベクトル合成となっていることである。この各成分を与える基底ベクトルは、それ自身が粒子の運動に伴って、変化することに注意しなければならない。さらに、t で微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

次に、$\dfrac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}$ の意味を考える。$\mathbf{e}_\varphi$ は運動に伴って向きは変わるが大きさは変わらない。したがって $\Delta\varphi$ が増大する運動の場合、$\dfrac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}$ は中心方向の成分だけをもつ。つまり $-\mathbf{e}_r$ の方向であり、$\Delta\varphi$ が減少する運動では $\mathbf{e}_r$ の方向である。次に、大きさを検討する。粒子の動径ベクトルが Δt 秒間に $\Delta\varphi$ だけ回転する。したがって、粒子の位置で見た $\mathbf{e}_\varphi$ は同じく $\Delta\varphi$ だけ回転する。したがって、$\mathbf{e}_\varphi$ の変化 $\Delta\mathbf{e}_\varphi$ の大きさ $\left|\Delta\mathbf{e}_\varphi\right|$ は $\Delta\varphi$ である(図 A.2c 参照)。ここで、$\Delta t\to 0$ の極限をとると

$$
\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{e}_\varphi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \qquad \text{(A.6)}
$$

であるので、$\dfrac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}$の符号に係わらず、

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_r \tag{A.7}$$

と表すことができる。したがって、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2}\mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\mathbf{e}_\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\mathbf{e}_r$$

$$= \left\{\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}\mathbf{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\mathbf{e}_\varphi \tag{A.8}$$

となる。第 3 章で曲線運動している粒子の速度ベクトルの時間微分係数を考えた。ここでは、速度ベクトルを微分すると加速度ベクトルとなるが、加速度ベクトルは向心方向のベクトルと接線方向のベクトル成分に分解できた。今回得られた結果では、ベクトル量としての加速度は、時刻tにおける粒子の位置での$\mathbf{e}_r$と$\mathbf{e}_\varphi$方向成分に分解できること、およびその各成分が示されている。

　ここで、ニュートンの運動方程式をみると、$m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi$　と表される。ここで、F_rおよびF_φは、それぞれ、力の$\mathbf{e}_r$と$\mathbf{e}_\varphi$方向成分である。つまり、粒子に働く力を動径方向と、それに垂直な$\mathbf{e}_\varphi$方向に分解すると、個々の成分について、次の方程式が成り立つ。

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{F_r}{m} \tag{A.9}$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{F_\varphi}{m} \tag{A.10}$$

ところで、

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 2r\frac{d\varphi}{dt} + r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{A.11}$$

なので、上の第 2 式は

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{1}{mr}\frac{dp_\varphi}{dt}=\frac{F_\varphi}{m} \tag{A.12}$$

と書き直される。ここで、$mr^2\dfrac{d\varphi}{dt}=p_\varphi$　は角運動量である。

質点の力学で非常に重要な中心力ポテンシャルでの運動を考える。中心力というのは、粒子に働く力がある一点を向いているということで、通常は力が常に向く方向を原点にとる。

そうすれば、$F_\varphi=0$ であるので、上式から

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{p_\varphi}{m}=const \tag{A.13}$$

となる。つまり、粒子の運動に際し角運動量は保存される。この結果から、$\mathbf{e}_r$ 方向への加速度成分は次のように書ける。
ここで、力を $F_r=f(r)$ と書けば、上式から、

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{{p_\varphi}^2}{mr^3}+f(r) \tag{A.14}$$

が得られ、これを微分方程式とみて解くことで時間の関数として動径の長さ r が求まる。この運動の意味を調べるために、とくに力が万有引力である場合を検討する。

$$f(r)=-\gamma\frac{Mm}{r^2} \tag{A.15}$$

この場合、

$$\frac{{p_\varphi}^2}{mr^3}-\gamma\frac{Mm}{r^2}=-\left(\frac{{p_\varphi}^2}{2m}grad_r\frac{1}{r^2}-(\gamma Mm)grad_r\frac{1}{r}\right)=-grad_r\left(\frac{{p_\varphi}^2}{2mr^2}-\gamma\frac{Mm}{r}\right)=-grad_rU$$

であるので

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-grad_rU \tag{A.16}$$

と表せる。ここで、$U=\dfrac{{p_\varphi}^2}{2mr^2}-\gamma\dfrac{Mm}{r}$ と置いた。また、$grad_r=\dfrac{\partial}{\partial r}$　という微分演算子であり、演算子 $grad$ を極座標で表したときの動径方向の微分演算を与える。この結果から、粒子の運動における原点からの距離 r は、粒子があたかもポテンシャルエネルギー U のなかで 1 次元運動をしていることで描写できることがわかる。このポテンシャルエネルギーは 2 つの関数で形成され、一つは万有引力によるものであり、もう一つは回転運動に伴う遠心力の効果を与えるものである。